# Sur l'exemple d'Euler d'une fonction CMO

Jean-Pierre Kahane, Eric Saias

# Sur l'exemple d'Euler d'une fonction $CMO$

Jean–Pierre KAHANE et Eric SAIAS

**Résumé**. Cet article développe et démontre les énoncés donnés dans la note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences CRAS, 354 (2016), 559-561.

**Abstract**. This article contains comments and proofs of the statements given in CRAS, 354 (2016), 559-561.

**Mots Clés, Keywords** : Generalized prime numbers, CMO, Euler, Beurling, Diamond.

Dans son grand article de 1737 sur les séries infinies, Euler considère la série $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$ etc (théorème 18 de [3]) dont il explique la formation : lorsque le dénominateur est un nombre premier, le signe est $-$ ; lorsque c'est le produit de plusieurs nombres premiers, le signe est $+$ ou $-$ selon que le nombre de facteurs premiers est pair ou impair. Il désigne par $x$ la somme de cette série, et un enchaînement de calculs bien menés lui permet de montrer que $x = 0$.

Avec les notations d'aujourd'hui, la série d'Euler s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n},$$

où $\lambda$, la fonction de Liouville, est la fonction complètement multiplicative qui vaut $-1$ sur les nombres premiers. Les calculs d'Euler reviennent à la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = \prod_p \Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}, \tag{1}$$

le produit étant pris sur les nombres premiers, et cette formule montre bien que la somme de la série est nulle.

Euler, en désignant sa somme par $x$, admettait que la série est convergente, mais cela est loin d'être évident. Comment faire ?

On peut s'appuyer sur la formule

$$\sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_n \Big(1+\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}$$

qui est valable pour $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Comme

$$1+\frac{1}{p^s} = \Big(1-\frac{1}{p^{2s}}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1},$$

on a

$$\sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \Big(1-\frac{1}{p^{2s}}\Big)^{-1} \prod_p \Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},$$

où $\zeta$ est la fonction dzêta de Riemann. Il est donc clair que

$$\lim_{\sigma\searrow 1} \sum_n \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} = 0\,. \tag{2}$$

Si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$ converge et a pour somme $x$, le premier membre de (2) vaut $x$ ; c'est, appliqué aux séries de Dirichlet, le procédé de sommation d'Abel. Mais le passage de (2) à la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$ a le caractère d'un théorème taubérien, et nécessite une étude.

Cette étude repose sur le comportement de la fonction $\zeta(1+it)$, et d'abord sur le fait que cette fonction ne s'annule pas. Nous avons montré dans [4] comment la mener par un procédé d'analyse de Fourier, qui va nous servir ici de nouveau.

Rappelons que $CMO$ signifie complètement multiplicative à somme nulle. La fonction $\big(\frac{\lambda(n)}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est l'exemple d'Euler d'une fonction $CMO$. Observons que son support est l'ensemble $\mathbb{N}^*$ entier. Nous allons étendre cet exemple dans deux directions.

D'abord, peut–on trouver des fonctions $CMO$ dont le support soit une petite partie de $\mathbb{N}^*$, dans un sens à préciser ? La réponse est positive

**Théorème 1.** *Pour tout $\alpha \in ]0,1]$, il existe une fonction $CMO$ dont le support, $N_\alpha$, a une fonction de décompte de la forme*

$$N_\alpha(x) = Dx^\alpha + o(x^\alpha)\,, \qquad (x \longrightarrow +\infty)$$

*pour un $D>0$ convenable.*

Seconde question. La notion de $CMO$ et celle de fonction de Liouville s'étendent dans le cadre des nombres premiers et des nombres entiers généralisés de Beurling [1]. Nous travaillerons avec un multiensemble infini $\mathcal{P}$ de $]1,+\infty[$, localement fini dans $[1,+\infty[$, et avec le multiensemble $\mathcal{N}$ formé des produits finis d'éléments de $\mathcal{P}$. Le multiensemble $\mathcal{P}$ est celui des nombres premiers généralisés, le multiensemble $\mathcal{N}$ est celui des nombres entiers généralisés. La fonction de Liouville associée au couple $(\mathcal{P},\mathcal{N})$ est la fonction $\lambda_{\mathcal{P}}$ à valeurs $\pm 1$ qui vérifie

$$\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^s}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\Big(1+\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}$$

pour $\mathrm{Re}\, s$ suffisamment grand. On utilisera les notations $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{N}(x)$ pour désigner les fonctions de décompte de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$. Elles sont à valeurs entières sauf éventuellement aux points de discontinuité, où leur valeur dépend de la convention adoptée, et leurs sauts aux points de discontinuité mesurent la multiplicité du multiensemble en ces points. Comment, dans ce cadre, étendre l'exemple d'Euler ?

Voici une réponse, qui fait intervenir, outre $\mathcal{P}$, un nombre $\alpha>0$ arbitraire. On désigne par $p_1$ le plus petit des nombres premiers généralisés.

**Théorème 2.** *Soit $\alpha>0$. Supposons*

$$\int_{p_1}^{+\infty}\Big|\mathcal{P}(x)-\frac{x^\alpha}{\alpha\log x}\Big|\frac{dx}{x^{1+\alpha}}<+\infty\,. \tag{3}$$

*Alors $\mathcal{N}(x)=Dx^\alpha+o(x^\alpha)$ $(x\to+\infty)$ pour un $D>0$ convenable, et*

$$\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^\alpha}=0 \tag{4}$$

*(somme suivant l'ordre croissant dans $\mathcal{N}$).*

On démontrera d'abord le théorème 2 dans le cas crucial $\alpha=1$, puis pour $\alpha>0$ quelconque, et on prouvera ensuite le théorème 1.

**Démonstration du théorème 2, cas $\alpha=1$**

Notre première conclusion découle du beau résultat de Diamond suivant

Lemme (Diamond [2])

*Sous l'hypothèse*

$$\int_{p_1}^{+\infty} \Big|\mathcal{P}(x) - \frac{x}{\log x}\Big| \, \frac{dx}{x^2} < +\infty \,,$$

*on a pour un $D > 0$ convenable,*

$$\mathcal{N}(x) = Dx + o(x)\,, \qquad (x \to +\infty)\,.$$

Nous allons réutiliser ce résultat à la fin de notre argumentation. Avant, il nous faut étudier la fonction, associée à $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$,

$$F(s) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \Big(1 + \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}\,, \qquad (\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1)\,.$$

Nous allons l'étendre en une fonction continue sur le demi–plan fermé $\sigma \geq 1$, contrôler sa croissance puis évaluer les sommes partielles en $t = 0$ de la série

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^{1+it}}\,, \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Ecrivons

$$F(s) = \exp \varphi(s)$$

avec

$$\varphi(s) = -\sum_{p \in \mathcal{P}} \log\Big(1 + \frac{1}{p^s}\Big) = -\int_{p_1}^{\infty} \log(1 + x^{-s}) d\mathcal{P}(x)\,,$$

$\log(1+x^{-s})$ étant le prolongement analytique de la fonction réelle $\log(1+x^{-\sigma})$ dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. L'intégration par parties donne

$$\varphi(s) = -\int_{p_1}^{+\infty} \frac{s x^{-s-1}}{1 + x^{-s}} \mathcal{P}(x) dx\,.$$

On peut mener le calcul en écrivant $\mathcal{P}(x) = \frac{x}{\log x} + \big(\mathcal{P}(x) - \frac{x}{\log x}\big)$. Il est plus rapide d'observer que $\pi(x)$, la fonction de décompte des nombres premiers usuels, qui vérifie

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\Big(\frac{x}{\log^2 x}\Big)\,, \qquad (x \to +\infty)\,,$$

permet, lorsque $\mathcal{P}(x)$ satisfait (3) avec $\alpha = 1$, de l'écrire

$$\mathcal{P}(x) = \pi(x) + \rho(x) \quad \text{avec} \quad \int_1^{+\infty} |\rho(x)| \, \frac{dx}{x^2} < +\infty \, .$$

Ainsi

$$\varphi(s) = -\int_{p_1}^{-\infty} \frac{sx^{-s-1}}{1+x^{-s}} \, \pi(x)dx - \int_{p_1}^{-\infty} \frac{sx^{-s-1}}{1+x^{-s}} \, \rho(x)dx \, .$$

Le premier terme est $\log \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$, dont on connait bien le comportement dans le demi–plan $\mathrm{Re}\, s \geq 1$. Retenons que c'est $\log(s-1) + O(1)$ pour $|s-1| \leq 1$ et $O(s)$ pour $|s-1| > 1$. Le second terme, en vertu de la condition sur $\rho(x)$, est $O(s)$ dans tout le demi–plan $\mathrm{Re}\, s \geq 1$. Il en résulte que $F(s)$ se prolonge en une fonction continue sur le demi–plan $\mathrm{Re}\, s \geq 1$, qui est $O(s-1)$ au voisinage de $s-1$, et $\exp O(s)$ dans tout le demi–plan.

Les sommes partielles de la série (4) pour $\alpha = 1$, vont être évaluées à partir de $F(1+it)$. Ecrivons

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ \log n \leq x}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} \, (1\!\!1_{[-x,x]} * \delta_{-\log n}(0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} F(1+it)dt \, ,$$

la dernière égalité étant pour l'instant purement formelle. Introduisons la gaussienne

$$\gamma(t) := e^{-t^2/2}$$

et notons, pour $a > 0$,

$$\gamma_a(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{1}{a} \, \gamma\Big(\frac{\xi}{a}\Big) \, .$$

On a alors, de façon rigoureuse cette fois,

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} \, (1\!\!1_{[-x,x]} * \gamma_a * \delta_{-\log n})(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} \gamma(at) F(1+it)dt \, .$$

Les majorations établies pour $|F(s)|$ entraînent que l'intégrale de droite existe et de plus, $\frac{F(1+it)}{t}$ étant intégrable, qu'en vertu du lemme de Riemann–Lebesgue elle tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Reste à utiliser le fait que $\gamma_a$ est une très bonne approximation de la mesure de Dirac $\delta_o$ quand $a$ est petit.

On sait ou on vérifie que

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\gamma(\xi)d\xi < \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) = \gamma(x)\,, \qquad (x \geq 0)\,,$$

d'où

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{R}} * \gamma_a)(u) = \int_u^{+\infty} \gamma_a(\xi)d\xi < \exp\Big(-\frac{u^2}{2a^2}\Big) = \gamma\Big(\frac{u}{a}\Big)\,, \qquad (u \geq 0)\,,$$

avec $\gamma_a$ paire, positive et d'intégrale 1. Il en résulte

$$|(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} * \gamma_a - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-})(u)| < \gamma\Big(\frac{u}{a}\Big)\,, \qquad (u \in \mathbb{R})\,.$$

En posant

$$r(a,x,u) = (\mathbb{1}_{[-x,x]} * \gamma_a - \mathbb{1}_{[-x,x]})(u)\,,$$

on en déduit

$$|r(a,x,u)| < \gamma\Big(\frac{u-x}{a}\Big) + \gamma\Big(\frac{u+x}{a}\Big)\,, \qquad (x > 0)\,. \tag{5}$$

On a

$$\sum_{n\in\mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n}\,(\mathbb{1}_{[-x,x]} * (\gamma_a - \delta_o) * \delta_{-\log n})(0) = R(a,x)$$

avec

$$R(a,x) := \int_{\log p_1}^{+\infty} r(a,x,u)e^{-u}\lambda_{\mathcal{P}}(e^u)d\mathcal{N}(e^u)\,.$$

Comme la fonction $\lambda_{\mathcal{P}}$ prend ses valeurs dans $[-1,1]$, on déduit de (5) que

$$|R(a,x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\gamma\Big(\frac{u-x}{a}\Big) + \gamma\Big(\frac{u+x}{a}\Big)\Big)e^{-u}d\mathcal{N}(e^u) \tag{6}$$

et c'est ici que l'on réutilise le lemme de Diamond. Ecrivons

$$\mathcal{N}(e^u) = De^u + \eta(u)e^u \qquad \text{avec} \lim_{u\to+\infty}\eta(u) = 0\,,$$

d'où, en termes de mesures,

$$d\mathcal{N}(e^u) = De^u du + \eta(u)e^u du + e^u d\eta(u)$$

et

$$d\mathcal{N}(e^u) \le D'e^u du + e^u d\eta(u) \qquad \text{avec } D' = D + \sup_u \eta(u)\,.$$

Le second membre de (6) est majoré par

$$D'\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\gamma\Big(\frac{u-x}{a}\Big)+\gamma\Big(\frac{u+x}{a}\Big)\Big)du + \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\gamma\Big(\frac{u-x}{a}\Big)+\gamma\Big(\frac{u+x}{a}\Big)\Big)d\eta(u)$$
$$= 2D'a\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\eta(u)d\Big(\gamma\Big(\frac{u-x}{a}\Big)+\gamma\Big(\frac{u+x}{a}\Big)\Big)\,.$$

Pour $a > 0$ fixé, le second terme tend vers 0 quand $x \to +\infty$, parce que $\lim_{u\to+\infty} \eta(u) = 0$. On voit ainsi que

$$\lim_{a\searrow 0}\limsup_{x\to+\infty} |R(a,x)| = 0\,.$$

Comme nous avons montré que

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n}(\mathbb{1}_{[-x,x]} * \gamma_a * \delta_{-\log n})(0) = 0\,,$$

il en résulte que

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n}(\mathbb{1}_{[-x,x]} * \delta_o * \delta_{-\log n})(0) = 0\,,$$

c'est à dire

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{\substack{n\in\mathcal{N}\\ \log n\le x}}\frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} = 0\,,$$

et le théorème 2 est ainsi établi dans le cas $\alpha = 1$.

**Démonstration du théorème 2, cas général**

Associons aux multiensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ les multiensembles $\mathcal{P}^\alpha$ et $\mathcal{N}^\alpha$ constitués respectivement des $p^\alpha (p \in \mathcal{P})$ et des $n^\alpha (n \in \mathcal{N})$ ; ainsi

$$\mathcal{P}^\alpha(x^\alpha) = \mathcal{P}(x) \;\text{ et }\; \mathcal{N}^\alpha(x^\alpha) = \mathcal{N}(x)\,.$$

L'hypothèse du théorème 2 s'écrit

$$\int_{p_1^\alpha}^{+\infty}\Big|\mathcal{P}^\alpha(y) - \frac{y}{\log y}\Big|\,\frac{dy}{y^2} < +\infty\,, \qquad (y = x^\alpha)\,,$$

et la conclusion

$$\sum_{n\in\mathcal{N}^\alpha} \frac{\lambda_{\mathcal{P}^\alpha}(m)}{m} = \sum_{n\in\mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^\alpha} = 0\,.$$

Le cas général découle donc facilement du cas particulier $\alpha = 1$.

**Démonstration du théorème 1**

Si $\alpha = 1$, l'exemple d'Euler $\lambda(n)/n$ convient. Dans la suite, on choisit $\alpha \in ]0,1[$. Le théorème 1 sera établi si nous montrons que l'on peut prendre dans le théorème 2 pour $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers usuels. Nous le noterons $P$.

Posons par commodité

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha \log x}\,.$$

Rappelons que la fonction de décompte des nombres premiers usuels vérifie

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\Big(\frac{x}{\log^2 x}\Big)\,. \tag{7}$$

Nous allons voir que cela permet de choisir $P$ de façon que

$$\int_{p_1}^{+\infty} |P(x) - f(x)| \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < +\infty\,, \tag{8}$$

ce qui achèvera la preuve du théorème 1.

Nous définissons $P$ par sa fonction de décompte, $P(x)$, et nous prenons pour $P(x)$ la plus grande fonction croissante, à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont les sauts, égaux à 1, n'ont lieu que sur les nombres premiers usuels, et telle que $P(x) < f(x)$ pour tout $x > 0$.

Distinguons les $x > p_1$ pour lesquels

$$f(x) - 1 \leq \mathcal{P}(x) < f(x)\,, \tag{9}$$

que nous appelons blancs, et les autres, que nous appelons noirs. Désignons par $E_b$ l'ensemble des $x$ blancs, et par $E_n$ celui des $x$ noirs.

Dans l'intégrale (8), la contribution de $E_b$ est majorée par $\int_{E_b} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$, qui est fini. Majorons à présent la contribution de $E_n$.

Les composantes connexes de $E_n$ sont des intervalles ouverts que l'on note $]u,v[$, sur lesquels il nous faut étudier $f - P$. Comme $P$ coïncide avec l'ensemble des nombres premiers usuels sur ces intervalles, on a

$$P(x+h) - P(x) = \pi(x+h) - \pi(x)\,,\ (u < x \leq x+h < v)\,. \tag{10}$$

A l'exception éventuelle du premier intervalle noir, $u$ est l'extrémité d'un intervalle blanc, sur lequel (9) a lieu. On a donc

$$P(u) = f(u) + O(1)\,. \tag{11}$$

En utilisant (7), (10) et (11), on obtient qu'il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que, pour

$$2 \le u \le u + h \le v \quad \text{et} \quad h > \frac{Cu}{\log u}\,, \tag{12}$$

on ait

$$\begin{aligned} P(u+h) - f(u) &= P(u+h) - P(u) + O(1) \\ &= \frac{h}{\log u} + O\Big(\frac{u+h}{\log^2 u}\Big) + O(1) \\ &> ch/\log u\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Supposons désormais $u$ suffisamment grand. On a alors

$$f(u+h) - f(u) \le hf'(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{1-\alpha}}\,\frac{h}{\log u}\,. \tag{14}$$

Comme $P(u+h) < f(u+h)$, on voit que (13) et (14) sont incompatibles, donc (12) est impossible : on a

$$v - u \le \frac{C\,u}{\log u}\,.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_u^v (f(x) - P(x))\frac{dx}{x^{1+\alpha}} &\le \frac{f(v) - P(u)}{u^\alpha} \int_u^v \frac{dx}{x} \\ &\le \frac{(v-u)f'(u) + O(1)}{u^\alpha} \int_u^v \frac{dx}{x} \\ &\le \frac{2C}{\log^2 u} \int_u^v \frac{dx}{x} \\ &\le C' \int_u^v \frac{dx}{x\log^2 x}\,. \end{aligned}$$

La contribution des intervalles noirs à l'intégrale (8) est donc également finie. Cela achève la preuve du théorème 1.

Cet article développe et démontre les résultats annoncés dans [5]. Le théorème 1 de [5] est notre présent théorème 1, le théorème 2 de [5] est notre théorème 2 réduit aux nombres premiers usuels, et le théorème 3 de [5] est notre théorème 2, exprimé pour $\alpha = 1$ et sous une forme un peu moins générale.

## Références

[1] A. Beurling.— *Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés,* Acta Math. 68 (1937), 255–291.

[2] H.G. Diamond.— *When do Beurling generalized integers have a density ?* J. Reine Angew. Math. 295 (1977), 22–39.

[3] L. Euler.— *Variae observationes circa series infinitas* (1737), Opera omnia, Ser. 1, Vol. 14, Teubner 1925, 216–244.

[4] J.–P. Kahane et E. Saïas .— *Fonctions complètement multiplicatives de somme nulle,* prépublication, arXiv ; 1507–04858.

[5] J.–P. Kahane et E. Saïas .— *Sur l'exemple d'Euler d'une fonction complètement multiplicative à somme nulle,* CRAS, 354 (2016), 559–561.

Jean–Pierre Kahane
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay
Université Paris–Sud, CNRS
Université Paris–Saclay
91405 Orsay (France)

jean-pierre.kahane@u-psud.fr

Eric Saias
Laboratoire de Probabilités et
Modèles Aléatoires
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France)

eric.saias@upmc.fr